数理解析研究所講究録
508巻 1983年 25-40

Gauss-Manin系の解の無限遠における展開

上智大・理工　野海正俊（Masatoshi Noumi）

§1. 序.

ここでは、孤立特異点の変形に伴うGauss-Manin系を考察する。Gauss-Manin系の解〜"周期"は、個々の函数として興味深いものと期待されるが、具体的な形で知られている例は数少なく、例えば、Euler積分表示をもつ超幾何函数等との関係すら明らかにされていないように思われる。そこで、Gauss-Manin系の解を何らかの形で、計算可能な対象として把握したい—というのが、このノートの一つの動機である。ここでは、その第一段階として、Gauss-Manin系の多価正則解を、無限遠点で展開することを試みる。(以下主に、斎藤恭司先生の枠組に従って、孤立特異点をもつ函数の開折に伴うGauss-Manin系を考えることにする。但し、技術的な理由で、議論は多項式のカテゴリーで行う。)

$f(x)$をn変数$x=(x_1,\dots,x_n)$の多項式で、$x=0$のみに孤立特異点をもつものとする(即ち$\{\partial_{x_1}f=\cdots=\partial_{x_n}f=0\}=\{0\}$, $\partial_{x_i}=\partial/\partial x_i$)。

$(t_0, t) = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ を変形のパラメータとして，$f(x)$ の変形多項式 $F(t_0, t, x) = t_0 + F_0(t, x)$ （ $F_0|_{t=0} = f$ ）を考える。このとき，次の形の積分の満たすべき微分方程式系として Gauss-Manin 系を理解する：λ を (generic な) 複素数として

(1.1) $\quad u(t_0, t) = \int \delta^{(\lambda)}(F(t_0, t, x))dx \quad$ (または $\int F(t_0, t, x)^{-\lambda-1} dx$),

ここに $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. 変形 F が比較的"単純"な場合には，Gauss-Manin 系（以下 GM 系と略す）を，未知函数のベクトルに対する微分方程式系として表示することができる。

以下 $f(x)$ は weighted homogeneous と仮定する。孤立特異点の仮定から，$\mathbb{C}[x]/(\partial_x f)$ （$(\partial_x f) = (\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$）は $\mathbb{C}$ 上有限次元であり，その次元 $\mu = \mu(f)$ を f の Milnor 数という。そこで，weighted homogeneous な $e_1, \ldots, e_\mu \in \mathbb{C}[x]$ をとり，その剰余類が $\mathbb{C}[x]/(\partial_x f)$ の基底をなすようにする（以下 $e_1 = 1$ としておく）。このとき，

(1.2) $\quad \vec{w} = {}^t(w_1, \ldots, w_\mu)$, $\quad w_i = \int e_i \delta^{(\lambda)}(t_0 + f) dx$

とおくと，$\vec{w}$ の満たすべき方程式系は次の形の単純なものである：（$D_{t_0} = \partial/\partial t_0$ と書く。）

(1.3) $\quad D_{t_0} t_0 \vec{w} = -\Lambda \vec{w} \quad ; \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda - \varepsilon_1, \ldots, \lambda - \varepsilon_\mu)$.

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\mu$ は有理数で，f の exponents と呼ばれる。一般の変形 $F = t_0 + F_0$ （ $F_0|_{t=0} = f$ ）については，事情は簡単ではないが，比較的"単純"な場合には，

(1.4) $\vec{u}={}^t(u_1,\ldots,u_\mu)$, $u_i=\int e_i\delta^{(\lambda)}(F)\,dx$

の満たすべき方程式系は，次の形の積分可能系として表示される：

$$(1.5)\quad \begin{cases} D_{t_0}t_0\vec{u}=(A_0(t)D_{t_0}+A_1(t))\vec{u} \\ D_{t_k}\vec{u}=(B_0^k(t)D_{t_0}+B_1^k(t))\vec{u} \end{cases} ;\ A_r,\ B_r^k\in M(\mu:\mathbb{C}[t]).$$

ここで $A_0|_{t=0}=0$，$A_1|_{t=0}=-\Lambda$ であり，(1.5)は，(1.3)の方程式系としての変形を与える。(t_0,t) を座標とするアフィン空間を $S=\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$ とし，(1.5)を S 上の方程式系と見做す。(1.5)において，$\Delta(t_0,t)=\det(t_0I-A_0(t))$（$t_0$ の μ 次 monic な多項式）を discriminant と呼ぶ。容易にわかるように，(1.5)は，S 上の，有理函数を係数とする全微分方程式系を定め，高々 $D=\{\Delta=0\}$ に沿ってのみ極を有する。これらのことから，(1.5)の $S\setminus D$ 上の多価正則解の基本系 $\Phi(t_0,t)$ で，$\Phi|_{t=0}=t_0^{-\Lambda-I}$ となるものが一意に定まることがわかる。ここで，t_0 軸方向に S をコンパクト化して $\bar{S}=\mathbb{P}^1\times\mathbb{C}^m$ をとり，無限遠超平面 $\{t_0=\infty\}$ に目を転じると，(1.5)は，$t_0=\infty$ に沿って確定特異点を有し，さらに，解の基本系 Φ について，$\Phi t_0^{+\Lambda+I}$ は，無限遠点 $(t_0,t)=(\infty,0)$ の近傍で一価正則となることが検証できる。これにより，Φ は $(t_0,t)=(\infty,0)$ の近傍で

$$(1.6)\qquad \Phi(t_0,t)=\sum_{r=0}^{\infty}\Phi_r(t)\,t_0^{-\Lambda-(r+1)I}$$

という形の展開を有することがわかる（$\Phi_r(t)$ は $t=0$ の近傍

で正則な函数の行列)。これが，標題にいうGM系の解の無限遠における展開である。至の第1行 — $u=u_1$ に対応する行に注目し，とくに，u に対応する1次独立解ということにする。

この形の展開の最も基本的な例は，次の楕円積分に対応する場合である：

例(1.7) $F=t_0+t_1x+x^3$ のとき，$\mu=2$. 積分 u に対応する2つの1次独立解は次で与えられる：

$$\begin{cases} t_0^{-\lambda-\frac{2}{3}}\,F\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{3},\frac{\lambda}{2}+\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{4t_1^3}{27t_0^2}\right) \\ \left(-\lambda-\frac{1}{3}\right)t_1t_0^{-\lambda-\frac{4}{3}}\,F\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{2}{3},\frac{\lambda}{2}+\frac{7}{6};\frac{4}{3};-\frac{4t_1^3}{27t_0^2}\right). \end{cases}$$

ここで $F(a,b;c;z)$ は Gauss の超幾何級数。この場合，$\Delta=t_0^2+\frac{4}{27}t_1^3$ で，$z=-\frac{4t_1^3}{27t_0^2}$ とおくと，$\Delta t_0^{-2}=1-z$ となることに注意する。」

一般に，Brieskorn type の $f(x)=x_1^{p_1}+x_2^{p_2}+\cdots+x_n^{p_n}$ に対し，変形 $F=t_0+t_1x_1+\cdots+t_nx_n+f$ をとると，積分 u に対応する $\mu=\prod_{i=1}^{n}(p_i-1)$ この1次独立解はすべて，ある種のMellin型超幾何級数による展開をもつことがわかる(後述)。その例として

例(1.8) $F=t_0+t_1x_1+t_2x_2+x_1^3+x_2^3$ のとき $\mu=2^2=4$. u に対応する4つの1次独立解は，Appellの超幾何級数

$$F_4(a,b;c_1,c_2;z_1,z_2)=\sum_{k_1,k_2\geq 0}\frac{(a;k_1+k_2)(b;k_1+k_2)}{(c_1;k_1)(c_2;k_2)}\cdot\frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\cdot\frac{z_2^{k_2}}{k_2!}$$

を用いて表わされる。例えば，4つのうちの1つは

$$t_0^{-\lambda-\frac{1}{3}}F_4\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{6},\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{3};\frac{2}{3},\frac{2}{3};-\frac{4t_1^3}{27t_0^2},-\frac{4t_2^3}{27t_0^2}\right).$$

この場合の discriminant は $\Delta = t_0^4 + \frac{8}{27}(t_1^3 + t_2^3)t_0^2 + \left(\frac{4}{27}\right)^2 (t_1^3 - t_2^3)^2$

で，$z_i = -\frac{4t_i^3}{27t_0^2}$ $(i=1,2)$ とおくと，

$$\Delta t_0^{-4} = 1 - 2(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)^2.$$

右辺は，Appell F_4 の特異点集合の，一つの既約成分の定義方程式である。」

Gauss-Manin 系の多価正則解の無限遠における展開に関連して得られている結果のうち主要な項目を掲げておく：

(1) $f(x)$ が，次の (I) または (II) の型の孤立特異点をもつ多項式であるとする：

(I) $f(x) = x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + \cdots + x_n^{p_n}$ (Brieskorn type)

(II) $f(x) = x_1^{p_1} + x_1 x_2^{p_2} + x_3^{p_3} + \cdots + x_n^{p_n}$

このとき，変形 $F = t_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n + f$ に対する GM 系の解の基本系の具体的な展開を決定すること。

(2) とくに $f(x)$ が (I) 型のとき，上の F に対する GM 系の解は，Mellin 型超幾何級数による展開をもつ。

(3) $f(x)$ が，次の，simple singularity の canonical form とする.

$$\begin{cases} A_\ell : f(x) = x_1^{\ell+1} + x_2^2 + \cdots + x_n^2 & (\ell \geq 1) \\ D_\ell : f(x) = x_1^{\ell-1} + x_1 x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 & (\ell \geq 4) \\ E_6 : f(x) = x_1^4 + x_2^3 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 & \\ E_7 : f(x) = x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 & \\ E_8 : f(x) = x_1^5 + x_2^3 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 & \end{cases}$$

このとき，$f(x)$ の（monomial による）versal deformation F に対し，GM 系の解の基本系の展開の具体形を決定すること。

(4) (3)の結果の応用として，斎藤恭司先生等によって導入された flat coordinate system を，A, D, E 型について，explicit に記述するある公式を得る。（以上の詳細については [7] を参照）

§2. 解の展開の構成

この節で，GM 系の多価正則解の無限遠での展開を求めるための実際的な方法について概説する。ここで述べる方法で計算される結果については次節で述べることにする。（以下，敬称略。）

パラメータ (t_0, t) の空間 $S = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ 上の，多項式係数の微分作用素の環を $\mathcal{D}(S) = \mathbb{C}[t_0, t; D_{t_0}, D_t]$ と記し，それを $D_{t_0}^{-1}$ で局所化したものを $\mathcal{D}(S)[D_{t_0}^{-1}]$ で表わす。$\mathcal{D}(S)[D_{t_0}^{-1}]$ の元は

$$(2.1) \qquad P = \sum_{r \in \mathbb{Z}} P_r(t_0, t, D_t) D_{t_0}^{r} \quad (\text{有限和})$$

の形に表わされる。我々は，GM 系を $\mathcal{D}(S)[D_{t_0}^{-1}]$ 上の左加群として定式化する。（ここで述べる定式化は，K. Saito [10 9], F. Pham [8] の定式化を翻訳したものである。）

(t_0, t, x) を座標とする affine 空間を $Z = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ と書く。$F(t_0, t, x) = t_0 + F_0(t, x)$ $(F_0|_{t=0} = f)$ に対して，

$$(2.2) \qquad M_F^{\lambda} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[t, x]\, \delta^{(\lambda+k)}(F) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

とおく。M_F^λ は定義により $\delta^{(\lambda+k)}(F)$ $(k\in\mathbb{Z})$ を基底とする自由 $\mathbb{C}[t,x]$-加群であるが，$t_0, D_{t_0}, D_{t_j}, D_{x_i}$ の作用は次のやり方で特定する：$t_0\delta^{(\lambda)}(F) = -F_0\delta^{(\lambda)}(F) - \lambda\delta^{(\lambda-1)}(F)$，$D_{t_0}\delta^{(\lambda)}(F) = \delta^{(\lambda+1)}(F)$，$D_{t_j}\delta^{(\lambda)}(F) = \partial_{t_j}(F)\delta^{(\lambda+1)}(F)$，$D_{x_i}\delta^{(\lambda)}(F) = \partial_{x_i}(F)\delta^{(\lambda+1)}(F)$． この左 $\mathcal{D}(Z)[D_{t_0}^{-1}]$-加群 M_F^λ を用いて，GM系 H_F^λ を

$$(2.3)\qquad H_F^\lambda = M_F^\lambda \Big/ \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} M_F^\lambda$$

と定める。H_F^λ は左 $\mathcal{D}(S)[D_{t_0}^{-1}]$-加群となる。以下標準全射 $M_F^\lambda \longrightarrow H_F^\lambda$ を $\int\cdot dx$ で表わす。($\lambda\notin\mathbb{Z}$ のときは，$M_F^\lambda \simeq \mathcal{D}(Z)F^{-\lambda-1}$ なので，H_F^λ は積分 $\int F^{-\lambda-1}dx$ の満たすべき方程式系でもある。)

まず，K. Saito [9]，F. Pham [8] あるいは石浦 [3] により知られている結果を，このGM系 H_F^λ について再構成する。

$\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ を正有理数の n 組としこれを $x=(x_1,\dots,x_n)$ の重みにとる。そこで次を仮定する：

(A.1) $f(0)=0$ かつ $f:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ は $x=0$ のみに critical point をもつ。

(A.2) f は，x の重み ρ について1次斉次。かつ $F=t_0+F_0$ について，$F-f$ の，x の重み ρ に関する次数は <1.

<u>定理 2.1.</u> 仮定 (A.1)(A.2) の下で，H_F^λ は，階数 $\mu=\mu(f)$ の自由 $\mathbb{C}[t][D_{t_0}, D_{t_0}^{-1}]$-加群。」

§1で述べたように $e_i \in \mathbb{C}[x]$ $(1 \le i \le \mu)$ をとると、 $u_i = \int e_i \delta^{(\lambda)}(F) dx$ $(1 \le i \le \mu)$ は、H_F^λ の自由 $\mathbb{C}[t][D_{t_0}, D_{t_0}^{-1}]$-基底をなし、$\vec{u} = {}^t(u_1, \ldots, u_\mu)$ に関し、H_F^λ は、次の形の有限表示をもつことがわかる。

$$(2.4) \quad \begin{cases} t_0 \vec{u} = \sum_{r=0}^{R} A_r(t) D_{t_0}^{-r} \vec{u} \\ D_{t_k} D_{t_0}^{-1} \vec{u} = \sum_{r=0}^{R} B_r^k(t) D_{t_0}^{-r} \vec{u} \quad (1 \le k \le m) \end{cases} ; A_r, B_r^k \in M(\mu, \mathbb{C}[t])$$

ここで $R=1$ とできる場合が、§1の表示(1.5)に対応する。実際、§1の最後にのべた(1)〜(4)を考えるときには $R=1$ となるが、いつこうなるか？については、今は深入りしない。(K.Saito [9], B.Malgrange [6] 参照。)

上の表示(2.4)は、H_F^λ の性質をよく反映するが、A_r, B_r^k を具体的に決定するのは容易でない。そこで、石浦による、母函数による表示を考える。今、簡単のため $m \ge n$ とし、$t' = (t_1, \ldots, t_n)$ $t'' = (t_{n+1}, \ldots, t_m)$ と書く。また有理数の m 組 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ を、$t = (t_1, \ldots, t_m)$ の重みとして固定する。

(B.1) F は次の形に書かれる：$F(t_0, t, x) = t_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n + G(t'', x)$ $\left(G|_{t''=0} = f \right)$.

(B.2) $F(t_0, t, x)$ は、(t_0, t, x) の重み $(1, \sigma, \rho)$ に関して1次斉次。

<u>定理 2.2.</u> 仮定(B.1)の下で、H_F^λ は、$\mathbb{C}[t'', D_{t'}][D_{t_0}, D_{t_0}^{-1}]$ 上、階数1の自由加群。$u = \int \delta^{(\lambda)}(F) dx$ はその基底となる。」

さらに H_F^λ は，u に関して次の有限表示をもつことがわかる：

(2.5) $$H(\tau_0,\tau',t'')=-\tau_0 G(t'',\tau'\tau_0^{-1})$$

として"母函数" H を定めると

$$(2.6)\begin{cases}(t_0-H_{\tau_0}(D_{t_0},D_{t'},t'')+(\lambda-n)D_{t_0}^{-1})u=0 \\ (t_i-H_{\tau_i}(D_{t_0},D_{t'},t''))u=0 \quad (1\le i\le n) \\ (D_{t_j}+H_{t_j}(D_{t_0},D_{t'},t''))u=0 \quad (n+1\le j\le m).\end{cases} \quad \begin{pmatrix} H_{\tau_i}=\dfrac{\partial H}{\partial \tau_i} \\ H_{t_j}=\dfrac{\partial H}{\partial t_j}\end{pmatrix}$$

(B.1) に加えて，(B.2) を仮定すると，(2.6) はもう少しみやすい方程式系となる：Euler 作用素 $\theta:=t_0D_{t_0}+\sum_{k=1}^{m}\sigma_k t_k D_{t_k}$ を用いると

$$(2.7)\begin{cases}\theta u=(\varepsilon_*-\lambda-1)u \quad \left(\varepsilon_*=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\right) \\ (t_i+G_{x_i}(t'',D_{t'}D_{t_0}^{-1}))u=0 \quad (1\le i\le n) \\ D_{t_j}D_{t_0}^{-1}u=G_{t_j}(t'',D_{t'}D_{t_0}^{-1})u \quad (n+1\le j\le m).\end{cases}$$

以下 (A.1) ～ (B.2) を仮定する。このとき，$\mathcal{D}(S)[D_{t_0}^{-1}]$-加群 H_F^λ は2通りの有限表示をもつこととなり，(2.4) の解はすべて，(2.7) の解から決まることがわかる。そこで，(2.7) の解を，無限遠における展開の形で決定することを考える。(1.6) では，t_0 の φ 函数を用いて展開したが，ここでも δ 函数を用いることにして，形式的な級数

(2.8) $$\phi(t_0,t)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}a_r(t)D_{t_0}^{r}\delta^{(\kappa)}(t_0) \quad (\kappa\in\mathbb{C},\ a_r(t)\in\mathbb{C}[[t]])$$

の形で解を探すことにする。しかし，この段階で (2.7) を解くのは賢明でない。

変形 $F(t_0,t,x)$ で，$t''=(t_{n+1},\dots,t_m)$ に関する変形の部分をやめ，

(2.9) $\quad \mathring{F}(t_0,t,x) = t_0 + t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + f(x)$

に対するGM系 $H^{\lambda}_{\mathring{F}}$ を考える。そうすると，H^{λ}_{F} は，$H^{\lambda}_{\mathring{F}}$ をある作用素で発展させたものと見做すことができる。まず，$H^{\lambda}_{\mathring{F}}$ の，(2.7)に対応する表示は次の形になることに注意しておく。

$$(2.10)\quad \begin{cases} \theta v = (\varepsilon_* - \lambda - 1)v \\ (t_i + f_{x_i}(D_{t'}D_{t_0}^{-1}))\, v = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \\ D_{t_j} v = 0 \quad (n+1 \leq j \leq m) \end{cases}$$

ここで，$K(\tau_0,\tau',t'') = H(\tau_0,\tau',t'') - H(\tau_0,\tau',0) = -\tau_0 G(t'',\tau'\tau_0^{-1}) + \tau_0 f(\tau'\tau_0^{-1})$ とおき，作用素 $e^{\pm K}$ $(K = K(D_{t_0},D_{t'},t''))$ を考える。

命題 2.3. 作用素 $e^{\pm K}$ は，(2.8)の形の級数の空間に可逆に作用し，$u = e^{-K}v$ によって，(2.7)は(2.10)に変換される。」

e^{K} の作用を書き下すのは困難でないので，(2.10)の解を決定すればよいことがわかる。ここで，(2.10)を係数の差分系に書き直す。今函数 $c: \mathbb{N}^n \to \mathbb{C}$ に対して，$\Delta_k c,\ T_k c: \mathbb{N}^n \to \mathbb{C}$ を次で定める。$(\Delta_k c)(\alpha) = \alpha_k c(\alpha - \mathbf{1}_k)$，$(T_k c)(\alpha) = c(\alpha + \mathbf{1}_k)$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$. 但し，$\mathbf{1}_k = (0,\cdots,\overset{k}{1},\cdots,0)$. このとき，

$$(2.11)\quad \psi(t_0,t) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_r(t)\,\delta^{(\kappa+r)}(t_0) \qquad (\kappa \in \mathbb{C})$$

が(2.10)の解となるための条件は，ψ が

$$(2.12)\quad \psi(t_0,t) = \sum_{r=\langle\sigma,\alpha\rangle-\varepsilon} c(\alpha)\frac{t'^{\alpha}}{\alpha!}\,\delta^{(\kappa+r)}(t_0) \quad (\varepsilon = \varepsilon_* + \kappa - \lambda)$$

$(\langle\sigma,\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i\alpha_i)$ と表わされ，$c: \mathbb{N}^n \to \mathbb{C}$ が次の差分系をみた

すことである：

(2.13)　$(\Delta_i + f_{x_i}(T'))c = 0 \quad (1 \leq i \leq n). \quad (T' = (T_1, \dots, T_n))$

従って，この差分系の解をすべて決定すれば，GM系の(2.8)の形の解はすべて決定されることになる。この差分系(2.13)は$T' = (T_1, \dots, T_n)$について陽に解けていないので，自明に解が求まる訳ではないが，例えばfが(I)型のときは容易である。fにある種の条件を課せば，fのNewton polygonから，(2.13)の解を系統的に作る方法もあるが，それで(2.13)のすべての解がつくされるかどうか明らかでなく，現段階では個々の例で検証している。今までに検証した範囲で述べたのが§1の最後の(1)～(4)である。

§3. 結果の概要.

ここでは主に$f(x)$が(I)型の場合について述べる。((II)型のときを含めて詳細はM. Noumi [7]を参照されたい。)

$f(x) = x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + \cdots + x_n^{p_n}$　$(p_i \geq 2)$とする。そこで，$\mathbb{C}[x]/(\partial_x f)$の基底を，単項式

(3.1)　$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} \quad (\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)\ ;\ 0 \leq \nu_i \leq p_i - 2)$

の剰余類でとる。以下

(3.2)　$N = \{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n\ ;\ 0 \leq \nu_i \leq p_i - 2 \ (1 \leq i \leq n)\}$

とおき，$N^* = N \setminus \{0\}$と書く。$\mu = \# N = \prod_{i=1}^{n} (p_i - 1)$. "lattice"L

$\subset \mathbb{Z}^n$ を

(3.3) $\qquad L = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} p_i \mathbf{1}_i \qquad \left(\mathbf{1}_i = (0, \dots, \overset{i}{\check{1}}, \dots, 0) \right)$

で定め，各 $\nu \in \mathbb{N}^n$ に対して $L(\nu) = (\nu + L) \cap \mathbb{N}^n$ とおく。そこで，各 $\nu \in N$ に対して，$L(\nu)$ に台をもつ函数 $c_\nu : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ を

(3.4) $\qquad c_\nu(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} (-1)^{k_i} \left(\frac{\nu_i + 1}{p_i} ; k_i \right) \qquad \left(\alpha \in L(\nu) ; k_i = \frac{\alpha_i - \nu_i}{p_i} \right)$

で定める。（$f(x)$ が (II) 型の場合も同様の形式で，N, L, c_ν が定まる。）

(1) $F = t_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n + f$ の Gauss-Manin 系 H_F^λ の，定理2.1の意味での基底として，

(3.5) $\quad \vec{u} = {}^t(u_\nu)_{\nu \in N} \ ; \ u_\nu = \int x^\nu \delta^{(\lambda)}(F) dx$ （または $\int x^\nu F^{-\lambda-1} dx$）

をとる。（δ函数を用いるときは λ は generic とする。）そこで，$\tilde{\nu}, \nu \in N$ に対して

(3.6) $\qquad P_{\tilde{\nu}, \nu}(t, D_{t_0}) = \sum_{r = \langle \sigma, \alpha \rangle + \langle \rho, \nu - \tilde{\nu} \rangle} c_\nu(\alpha + \tilde{\nu}) \frac{t^\alpha}{\alpha!} D_{t_0}^r$

とおく。このとき

<u>定理 3.1.</u> $\vec{u} = {}^t(u_\nu)_{\nu \in N}$ に対する GM 系の解の基本系は，

$$\Phi = \left(P_{\tilde{\nu}, \nu} \delta^{(\lambda - \varepsilon_\nu)} \right)_{\tilde{\nu}, \nu} \quad \text{または} \quad \left(P_{\tilde{\nu}, \nu} t_0^{\varepsilon_\nu - \lambda - 1} \right)_{\tilde{\nu}, \nu}$$

で与えられる。」（(II)型でも，同じ形式で述べられる。）

(2). 上で，δ函数を用いて書いた Φ の $\tilde{\nu} = 0$ に対応する行の成分を書き直せば，§1で述べた様な，超幾何級数による表示が得られる。ここでは，これを少し違う方法で導く。(1)の記号で，$u = \int \delta^{(\lambda)}(F) dx$ または $\int F^{-\lambda-1} dx$ の，(2.7)に対応す

る方程式系は，今の場合，

(3.7) $\theta u=(\varepsilon_*-\lambda-1)u$; $(t_i+p_i D_{t_i}^{p_i-1}D_{t_0}^{-p_i+1})u=0$ $(1\le i\le n)$

である。ここで，$\theta = t_0D_{t_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}t_iD_{t_i}$，$\varepsilon_*=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$．今新しい変数 $z=(z_1,\dots,z_n)$ を

(3.8) $z_i=(-1)^{p_i}t_i^{p_i}/p_i^{p_i}t_0^{p_i-1}$ $(1\le i\le n)$

で定め，$u(t_0,t)=t_0^{\varepsilon_*-\lambda-1}v(z)$ で変換すると，v の方程式として，次のMellin型の超幾何方程式系が得られる：

$\vartheta_z=(\vartheta_{z_1},\dots,\vartheta_{z_n})$，$\vartheta_{z_i}=z_iD_{z_i}$ とおくとき，

(3.9) $\left\{[\langle p-1,\vartheta_z\rangle+\lambda-\varepsilon_*;p_i-1]z_i-\prod_{k=0}^{p_i-2}\left(\vartheta_{z_i}-\frac{k}{p_i}\right)\right\}v=0$ $(1\le i\le n)$.

ここで $[s;k]=s(s-1)\cdots(s-k+1)$．各 $\nu\in N$ に対して，

(3.10) $$G_\nu(z)=\sum_{\alpha\in N^n}\frac{(1+\lambda-\varepsilon_*-\langle\sigma,\nu\rangle;\langle p-1,\alpha\rangle)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=0}^{p_i-2}\left(1+\frac{\nu_i-k}{p_i};\alpha_i\right)}\cdot z^{\alpha}$$

とおく．($\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$，$\sigma_i=\frac{p_i-1}{p_i}$.) このとき，$z^{\nu/p}G_\nu(z)$ $(\nu\in N)$ が (3.9) の $\mu=\prod_{i=1}^{n}(p_i-1)$ この1次独立解を与える。これから，

<u>定理 3.2.</u> $f(x)=x_1^{p_1}+\cdots+x_n^{p_n}$，$F=t_0+t_1x_1+\cdots+t_nx_n+f$ のとき，$u=\int F^{-\lambda-1}dx$ (λ: generic) に対するGM系の $\mu=\prod_{i=1}^{n}(p_i-1)$ この1次独立解は

$$\phi_\nu=\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}(\lambda-\varepsilon_\nu+1:|\nu|)\,t^{\nu}t_0^{-\lambda-1+\varepsilon_\nu-|\nu|}G_\nu((-1)^p t^p/p^p t_0^{p-1})$$

$(\nu\in N)$ で与えられる。ここで $\varepsilon_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\nu_i+1}{p_i}$.」

この表示は，$F=t_0+t_1x+x^p$ のときは，Barnesの超幾何級数に

よる表示であり，$F = t_0 + t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + x_1^3 + \cdots + x_n^3$ のときは，n 変数の，Lauricella の超幾何級数 F_C による表示となる。

(3) $f(x)$ を，simple singularity の canonical form（§1の）とする。A_ℓ のときは $x_1^{\ell+1}$，D_ℓ, E_6, E_7, E_8 のときは，夫々，$x_1^{\ell-1}+x_1x_2^2$，$x_1^4+x_2^3$，$x_1^3+x_1x_2^3$，$x^5+x_2^3$ に対応する，index の集合 N，函数 c_ν ($\nu\in N$) をとる。$t=(t_\nu)_{\nu\in N^*}$ とおき，$(t_0,t)=(t_\nu)_{\nu\in N}$ を変形パラメータとして，$f(x)$ の versal な変形

(3.11) $$F(t_0,t,x) = \sum_{\nu\in N} t_\nu x^\nu + f(x)$$

を考える。multi-index $\alpha\in \mathbb{N}^{\mu-1}$; $\alpha=(\alpha_\nu)_{\nu\in N^*}$ に対して，1または2変数の multi-index $\ell(\alpha)$ を，

(3.12) $$e^{\sum_{\nu\in N^*} t_\nu x^\nu} = \sum_{\alpha\in \mathbb{N}^{\mu-1}} \frac{t^\alpha}{\alpha!}\, x^{\ell(\alpha)}$$

によって定める。($\ell_i(\alpha)=\sum_{\nu\in N^*}\nu_i\alpha_\nu$.) このとき

$$\vec{u} = {}^t(u_\nu)_{\nu\in N} \quad ; \quad u_\nu = \int x^\nu \delta^{(\lambda)}(F)\,dx$$

とおき，対応して，$\tilde\nu,\nu\in N$ に対し

(3.13) $$P_{\tilde\nu,\nu}(t,D_{t_0}) = \sum_{r=\langle\sigma,\alpha\rangle-\sigma_\nu+\sigma_{\tilde\nu}} c_\nu(\ell(\alpha)+\tilde\nu)\,\frac{t^\alpha}{\alpha!}\,D_{t_0}^{\,r}$$

とおく。

定理 3.3. 上の設定で，$\vec u = {}^t(u_\nu)_{\nu\in N}$ に対するGM系の解の基本系は

$$\Phi = \left(P_{\tilde\nu,\nu}\,\delta^{(\lambda-\varepsilon_\nu)}(t_0)\right) \text{ または } \left(P_{\tilde\nu,\nu}\, t_0^{\varepsilon_\nu-\lambda-1}\right)$$

で与えられる。」

(4) 上の結果から，A, D, E 型の flat coordinate system を

決定することができる。（flat coordinate system については，K. Saito [9]，矢野 [11]，石浦・野海 [4] 等を参照のこと。）

(3) の記号を用いて，

定理 3.4. A, D, E 型の上の versal deformation F について，$(t_\nu)_{\nu\in N}$ に対応する flat coordinate system を $(s_\nu)_{\nu\in N}$ と書くと，$s_\nu\ (\nu\in N)$ は

$$\begin{cases} s_0 = t_0 + \displaystyle\sum_{\langle\sigma,\alpha\rangle=1} c_0(\ell(\alpha))\cdot\frac{t^\alpha}{\alpha!} \\ s_\nu = \displaystyle\sum_{\langle\sigma,\alpha\rangle=\sigma_\nu} c_\nu(\ell(\alpha))\frac{t^\alpha}{\alpha!} \qquad (\nu\in N^*) \end{cases}$$

で与えられる。」

文献

[1] Aomoto, K; Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multi-formes. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, 22, 271–297, 1975.

[2] Appell, P. et Kampé de Fériet, J: Fonctions hypergeométriques et hypersphériques, Gauthier-Villars, 1926

[3] 石浦信三: Gauss-Manin system の特性多様体の母函数について，数学のあゆみ 21号, 206–219, 1981.

[4] 石浦信三・野海正俊: A型 Gauss-Manin 方程式系，数理研講究録 459, 29–57, 1982

[5] Kita, M and Noumi, M; On the structure of cohomology groups attached to the integral of certain many-valued analytic functions, to appear in Japan. J. Math.

[6] Malgrange, B.: Déformations des systèmes différentiels et micro-différentiels, preprint.

[7] Noumi, M: Expansion of the solutions of a Gauss-Manin system at a point of infinity, preprint.

[8] Pham, F: Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Birkhäuser, 1979.

[9] Saito, K; Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, 28, 775-792, 1982.

[10] Saito, K; On the periods of primitive integrals, I, preprint RIMS-412, 1982.

[11] 矢野環；有限鏡映群の不変式と孤立特異点の flat coordinate system，数理研講究録 444, 209-235.